

第3讲 动点问题和找规律

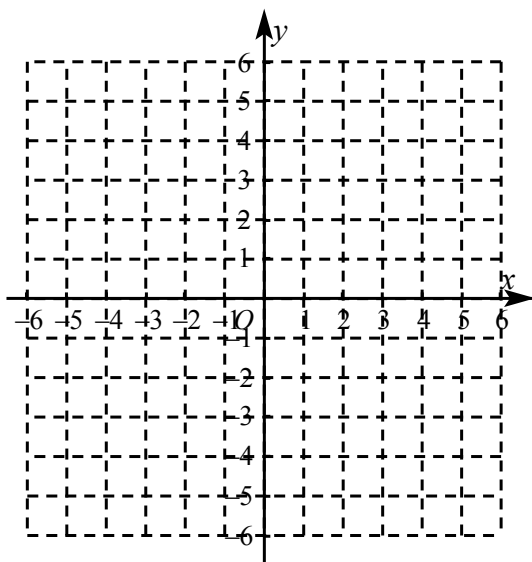
一、坐标系中的动点问题

【教法备注】

善于利用“点的坐标和线段间的相互转化”

例题1

1. 已知：在平面直角坐标系中，点 A ， B 的坐标分别是 $(a, 0)$ ， $(b, 0)$ 且 $|a + 4| + \sqrt{b - 2} = 0$ 。



- (1) 求点 A ， B 的坐标。
- (2) 在 y 轴上是否存在点 C ，使 $\triangle ABC$ 的面积是15？若存在，求出点 C 的坐标；若不存在，请说明理由。
- (3) 已知点 P 是 y 轴负半轴上一点，且到 x 轴的距离为3，若点 P 沿 x 轴负半轴方向以每秒2个单位长度平移至点 Q ，当运动时间 t 为多少秒时，四边形 $ABPQ$ 的面积 S 为15个平方单位？求此时点 Q 的坐标。

【答案】(1) $A(-4, 0)$ ， $B(2, 0)$ 。

(2) 存在， $C(0, 5)$ 或 $C(0, -5)$ 。

(3) 2秒， $Q(-4, -3)$ 。

【解析】(1) $\because |a + 4| + \sqrt{b - 2} = 0$,

又 $\because a + 4 \geq 0$ ， $b - 2 \geq 0$,

$\therefore a + 4 = 0$ ， $b - 2 = 0$,

解得： $a = -4$ ， $b = 2$ ，

$\therefore A(-4, 0)$ ， $B(2, 0)$ 。

(2) 存在。设 $C(0, m)$ ，

$\therefore A(-4, 0)$ ， $B(2, 0)$ ，

$\therefore AB = 4 + 2 = 6$ ，

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times |m| = 15$ ，

$\therefore m = \pm 5$ ，

$\therefore C(0, 5)$ 或 $C(0, -5)$ 。

(3) $\therefore$ 点 P 是 y 轴负半轴上一点，且到 x 轴的距离为3，

$\therefore P(0, -3)$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABPQ$ 为梯形，且 $AB = 6$ ， $OP = 3$ ， $QP = 2t$ ，

$\therefore S = \frac{1}{2} \times (2t + 6) \times 3 = 15$ ，

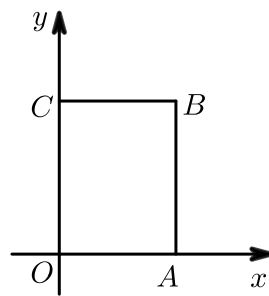
解得： $t = 2$ ，

$\therefore$ 当运动时间 t 为2秒时，四边形 $ABPQ$ 的面积 S 为15个平方单位，

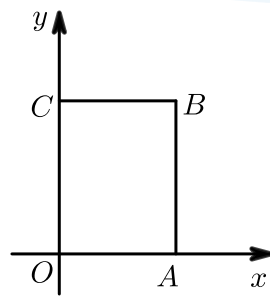
此时点 Q 的坐标 $(-4, -3)$ 。

【标注】【知识点】坐标与面积

2. 如图，在长方形 $OABC$ 中， O 为平面直角坐标系的原点，点 A 的坐标为 $(a, 0)$ ，点 C 的坐标为 $(0, b)$ 且 a 、 b 满足 $\sqrt{a-8} + |b-12| = 0$ ，点 B 在第一象限内，点 P 从原点出发，以每秒2个单位长度的速度沿着 $O-A-B-C-O$ 的线路移动。



- (1) 求点 B 的坐标为 _____。当点 P 移动5秒时，点 P 的坐标为 _____。
- (2) 在移动过程中，当点 P 移动11秒时，求 $\triangle OPB$ 的面积。
- (3) 在(2)的条件下，坐标轴上是否存在点 Q ，使 $\triangle OPQ$ 的面积与 $\triangle OPB$ 的面积相等，若存在，求点 Q 的坐标；若不存在，说明理由。



备用图

【答案】(1) $(8, 12)$; $(8, 2)$

(2) 12.

(3) 存在, 坐标为 $Q(-2, 0)$, $Q(2, 0)$, $Q(0, 4)$, $Q(0, -4)$.

【解析】(1) $\sqrt{a-8} + |b-12| = 0$,

$$\because \sqrt{a-8} \geq 0, |b-12| \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{a-8} = 0, |b-12| = 0,$$

$$\therefore a = 8, b = 12,$$

$$\therefore A \text{点坐标为}(8, 0), C \text{点坐标为}(0, 12),$$

$\therefore$ 四边形 $OACB$ 为长方形,

$$\therefore OA = BC = 8, AB = OC = 12, B \text{点坐标为}(8, 12),$$

$\therefore P$ 点速度为每秒 2 个单位长度,

$$\therefore 5 \text{秒钟} P \text{点运动路程为} 5 \times 2 = 10,$$

$$\therefore OA = 8 < 10, OA + AB = 8 + 12 = 20 > 10,$$

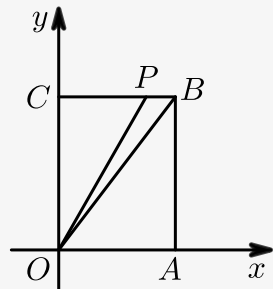
$\therefore 5$ 秒时 P 点在线段 AB 上,

$$\therefore AP = 10 - OA = 10 - 8 = 2,$$

$$\therefore \text{点} P \text{坐标为}(8, 2),$$

故答案为 $(8, 12)$, $(8, 2)$.

(2) 如图:



$$\text{当点} P \text{运动} 11 \text{秒时}, 11 \times 2 = 22,$$

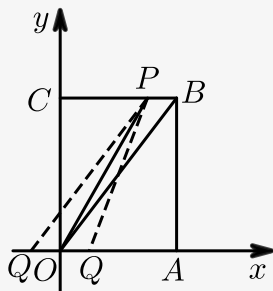
$$\therefore OA + AB = 8 + 12 = 20 < 22,$$

$$OA + AB + BC = 8 + 12 + 8 = 28 > 22,$$

∴点P在边BC上, 此时 $PB = 22 - 20 = 2$,

$$\therefore S_{\triangle OPB} = \frac{1}{2} \times PB \times AB = \frac{1}{2} \times 2 \times 12 = 12.$$

(3) ①当点Q在x轴上时,

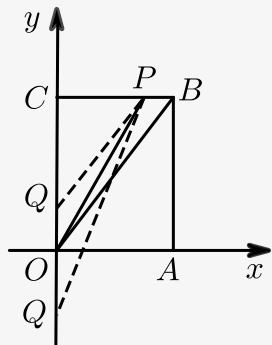


$$\therefore S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \times OQ \times BA = \frac{1}{2} \times OQ \times 12 = 12,$$

$$\therefore OQ = 2,$$

$$\therefore Q(-2, 0) \text{ 或 } (2, 0);$$

②当点Q在y轴上时, $CP = 6$,



$$\therefore S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \times OQ \times CP = \frac{1}{2} \times OQ \times 6 = 12,$$

$$\therefore OQ = 4,$$

$$\therefore Q(0, 4) \text{ 或 } (0, -4),$$

综上 $Q(-2, 0)$, $Q(2, 0)$, $Q(0, 4)$, $Q(0, -4)$.

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

3. 在平面直角坐标系中, 点A、B的坐标分别是 $(a, 0)$ 、 $(0, b)$, 且 $\sqrt{a+4} + |b-2| = 0$.

(1) $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 在y轴上是否存在一点C, 使 $\triangle ABC$ 的面积是12? 若存在, 请求出点C的坐标; 若不存在, 请说明理由.

(3) 已知P是y轴正半轴上一点, 且到x轴的距离为3. 若点P沿水平方向向左以每秒1个单位长度的速度平移至点Q, 当运动时间为多少秒时, 四边形ABPQ的面积S为15, 写出此时点Q的坐标.

【答案】(1) $-4; 2$

(2) 存在. $C(0, -4)$ 或 $(0, 8)$.

(3) 运动 $\frac{26}{3}$ 秒时, $Q\left(-\frac{26}{3}, 3\right)$.

【解析】(1) $\because \sqrt{a+4} + |b-2| = 0$,

$$\therefore \begin{cases} a+4=0 \\ b-2=0 \end{cases},$$

$$\text{得} \begin{cases} a=-4 \\ b=2 \end{cases}.$$

(2) 存在.

(1) C 在 B 下方, 设 C 点 $(0, m)$,

$$BC = 2 - m, AO = 4,$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}(2 - m) \cdot 4 \\ &= 4 - 2m, \end{aligned}$$

$$4 - 2m = 12,$$

$$m = -4.$$

(2) C 在 B 上方, 设 C 点 $(0, n)$,

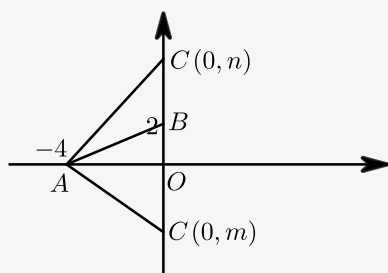
$$BC = n - 2, OA = 4,$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}(n - 2) \cdot 4 \\ &= 2n - 4, \end{aligned}$$

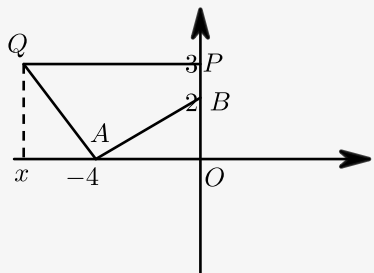
$$2n - 4 = 12,$$

$$n = 8.$$

综上: $C(0, -4)$ 或 $(0, 8)$.



(3) 如图所示: 设 Q 点在 $(x, 3)$ 处.



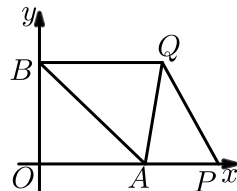
$$\begin{aligned}
S_{\text{四边形}ABPQ} &= S_{\text{梯}AOPQ} - S_{\triangle AOB} \\
&= \frac{1}{2}(OA + PQ) \cdot OP - \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \\
&= \frac{1}{2}[4 + (-x)] \cdot 3 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \\
&= 6 - \frac{3}{2}x - 4 \\
&= 2 - \frac{3}{2}x, \\
2 - \frac{3}{2}x &= 15, \\
x &= -\frac{26}{3}.
\end{aligned}$$

此时 $Q\left(-\frac{26}{3}, 3\right)$, 运动 $\frac{26}{3}$ 秒.

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

练习1

4. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(4, 0)$ ，点 $B(0, 3)$ ，点 P 从点 A 出发，以每秒1个单位的速度在 x 轴上向右平移，点 Q 从 B 点出发，以每秒2个单位的速度沿直线 $y = 3$ 向右平移，又 P 、 Q 两点同时出发，设运动时间为 t 秒.



- (1) 当 t 为何值时，四边形 $OBQP$ 的面积为8.
- (2) 连接 AQ ，当 $\triangle APQ$ 是直角三角形时，求 $\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\text{四边形}OBPQ}}$ 的值.

【答案】(1) $t = \frac{4}{9}$.

$$(2) \frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\text{四边形}OBPQ}} = \frac{1}{4},$$

【解析】(1) 设运动时间为 t 秒， $BQ = 2t$,

$$OQ = 4 + t, S = \frac{1}{2}(3t + 4) \times 3 = 8,$$

$$\text{解得: } t = \frac{4}{9}.$$

$$(2) S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}AO \cdot BO = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6,$$

当 $\angle QAP = 90^\circ$ 时， $Q(4, 3)$ ， $t = 2$,

$$\begin{cases} BQ = 2 \times 2 = 4 \\ AP = 2 \times 1 = 2 \\ OP = 4 + 2 = 6 \end{cases}$$

$$S_{OBPQ} = \frac{1}{2} \times (4 + 6) \times 3 = 15 ,$$

$$\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle BPQ}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} ,$$

当 $\angle QPA = 90^\circ$, $Q(8, 3)$, $t = 4$,

$$BQ = 4 \times 2 = 8 ,$$

$$AP = 4 \times 1 = 4 ,$$

$$OP = 4 + 4 = 8 ,$$

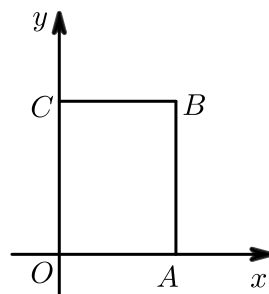
$$S_{OBPQ} = \frac{1}{2} \times (8 + 8) \times 3 = 24 ,$$

$$\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\text{四边形}OBPQ}} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} ,$$

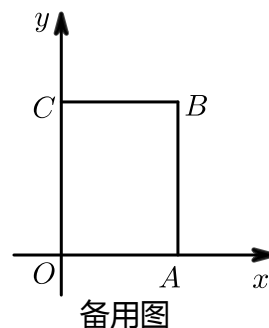
当 $\angle AQP = 90^\circ$ 时, 不存在 Q 点 .

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

5. 如图, 在长方形 $OABC$ 中, O 为平面直角坐标系的原点, 点 A 的坐标为 $(a, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, b)$ 且 a, b 满足 $\sqrt{a-4} + |b-6| = 0$, 点 B 在第一象限内, 点 P 从原点出发, 以每秒 2 个单位长度的速度沿着 $O - C - B - A - O$ 的线路移动 .



- (1) 点 B 的坐标为 ____ . 当点 P 移动 3.5 秒时, 点 P 的坐标为 ____ .
 (2) 在移动过程中, 当点 P 到 x 轴的距离为 4 个单位长度时, 求点 P 移动的时间 .
 (3) 在移动过程中, 当 $\triangle OBP$ 的面积是 10 时, 求点 P 移动的时间 .



【答案】 (1) $(4, 6)$; $(1, 6)$

(2) P 移动时间为 2 秒或 6 秒 .

(3) 点 P 移动时间为 $\frac{5}{2}$ 秒, $\frac{10}{3}$ 秒, $\frac{15}{2}$ 秒或 $\frac{25}{3}$ 秒 .

【解析】(1) $\because \sqrt{a-4} + |b-6| = 0$,

又 $\because \sqrt{a-4} \geq 0, |b-6| \geq 0$,

$\therefore a-4=0$,

$a=4$,

$\therefore b-6=0$,

$b=6$,

$\therefore A(4,0), C(0,6)$,

$\therefore B$ 的坐标为 $(4,6)$,

当 P 移动 3.5 秒时, 点 P 运动的路程为 $2 \times 3.5 = 7$,

依题意有: $OC = 6, CB = 4$,

$\therefore$ 此时 P 在 BC 上运动, 且 $CP = 7 - 6 = 1$,

$\therefore$ 此时点 P 的坐标为 $(1,6)$.

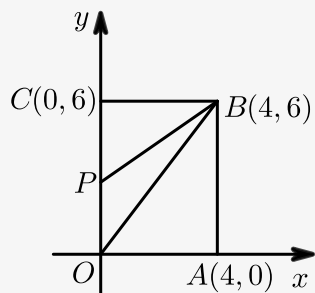
(2) 在移动过程中, 点 P 到 x 轴的距离为 4 个单位长度时存在两种情况.

① 若点 P 在边 OC 上时, 运动时间为 $4 \div 2 = 2(\text{s})$,

② 若点 P 在边 BC 上时, 运动时间为 $[6 + 4 + (6 - 4)] \div 2 = 6(\text{s})$,

$\therefore P$ 移动时间为 2 秒或 6 秒.

(3) ①



图①

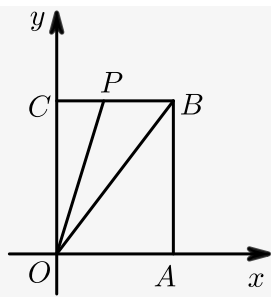
如图①所示 $S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2}OP \cdot BC$,

$$10 = \frac{1}{2}OP \cdot 4,$$

$$OP = 5,$$

$$\therefore t = \frac{OP}{2} = \frac{5}{2}(\text{s}).$$

②



图②

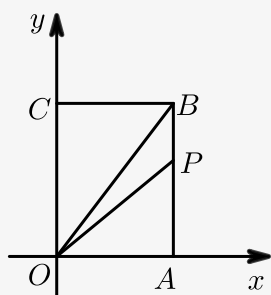
如图②所示 $S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2}BP \cdot OC$,

$$10 = \frac{1}{2}BP \cdot 6,$$

$$BP = \frac{10}{3},$$

$$\therefore t = \frac{OC + CP}{2} = \frac{6 + \left(4 - \frac{10}{3}\right)}{2} = \frac{\frac{20}{3}}{2} = \frac{10}{3}(\text{s}).$$

③



图③

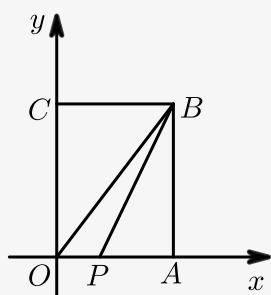
如图③所示 $S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2}BP \cdot OA$,

$$10 = \frac{1}{2} \times 4 \cdot BP,$$

$$BP = 5,$$

$$t = \frac{OC + BC + BP}{2} = \frac{6 + 4 + 5}{2} = \frac{15}{2}(\text{s}).$$

④



图④

如图④所示 $S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2}OP \cdot AB$,

$$10 = \frac{1}{2}OP \times 6,$$

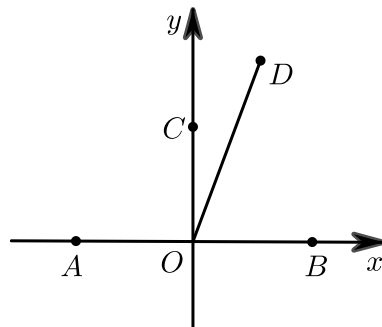
$$OP = \frac{10}{3},$$

$$t = \frac{OC + BC + AB + AP}{2} = \frac{6 + 4 + 6 + \left(4 - \frac{10}{3}\right)}{2} = \frac{25}{3}(\text{s}),$$

综上所述，点 P 移动时间为 $\frac{5}{2}$ 秒， $\frac{10}{3}$ 秒， $\frac{15}{2}$ 秒或 $\frac{25}{3}$ 秒。

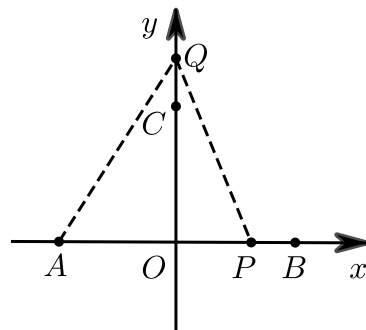
【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

6. 如图①，在平面直角坐标系中，已知点 $A(-5, 0)$ ， $B(5, 0)$ ， $D(2, 7)$ 。



图①

- (1) 若点 C 为 AD 与 y 轴的交点，求 C 点的坐标。
- (2) 动点 P 从 B 点出发以每秒1个单位的速度沿 BA 方向运动，同时动点 Q 从 C 点出发，也以每秒1个单位的速度沿 y 轴正半轴方向运动。（当 P 点运动到 A 点时，两点都停止运动，如图②所示）。设从出发起运动了 t 秒。



图②

- ① 请用含 t 的代数式分别表示 P 、 Q 两点的坐标。
- ② 当 $t = 2$ 时， y 轴上是否存在一点 E ，使得 $\triangle AQE$ 的面积与 $\triangle APQ$ 的面积相等？若存在，求 E 点的坐标，若不存在，说明理由。

【答案】 (1) $C(0, 5)$ 。

(2) ① $P(5 - t, 0)$ ， $Q(0, 5 + t)$ 。

② $E_1\left(0, -\frac{21}{5}\right)$ ， $E_2\left(0, \frac{91}{5}\right)$ 。

【解析】 (1) $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot 7 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 = \frac{35}{2}$ ，

$$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COD},$$

$$\frac{35}{2} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AO + \frac{1}{2} \cdot OC \cdot 2,$$

$$\frac{35}{2} = (5OC + 2OC) \frac{1}{2},$$

$$OC = 5,$$

$$\therefore C(0, 5).$$

$$(2) \textcircled{1} \because BP = 1 \cdot t = 5,$$

$$\therefore P(5 - t, 0),$$

$$\because CQ = 1 \cdot t = t,$$

$$\therefore Q(0, 5 + t).$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } t = 2 \text{ 时},$$

$$P(3, 0), Q(0, 7),$$

$$\text{设 } E(0, y_E),$$

$$S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot OQ = \frac{1}{2} \cdot (3 + 5) \cdot 7 = 28,$$

假设存在,

$$S_{\triangle AQE} = S_{\triangle APQ},$$

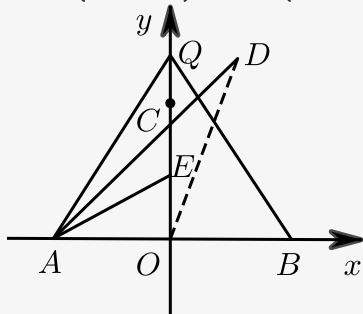
$$\frac{1}{2} \cdot QE \cdot AD = 28,$$

$$\therefore \frac{1}{2} (7 - y_E) \cdot 5 = 28,$$

$$7 - y_E = \frac{56}{5} \text{ 或 } 7 - y_E = -\frac{56}{5},$$

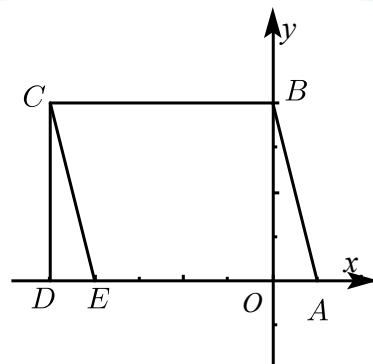
$$y_E = -\frac{21}{5} \text{ 或 } y_E = \frac{91}{5},$$

$$\therefore E_1\left(0, -\frac{21}{5}\right), E_2\left(0, \frac{91}{5}\right).$$



【标注】【知识点】一次函数与动点问题

7. 如图所示, $A(1, 0)$ 、点 B 在 y 轴上, 将 $\triangle OAB$ 沿 x 轴负方向平移, 平移后的图形为 $\triangle DEC$, 且点 C 的坐标为 $(-5, 4)$.



- (1) 直接写出点 E 的坐标 _____ .
- (2) 在四边形 $ABCD$ 中, 点 P 从点 B 出发, 沿“ $BC \rightarrow CD$ ”移动, 当点 P 运动到 D 点时停止.
在运动过程中, 若点 P 的速度为每秒1个单位长度, 当时间为 t 秒时, 点 P 的横坐标与纵坐标和为 -3 , 求出此时 t 的值.
- (3) 在(2)中, 点 P 运动到什么位置, 直线 AP 将四边形 $ABCD$ 面积分成 $3:8$ 两部分? 并求 P 点坐标.

【答案】 (1) $(-4, 0)$

(2) $t = 7$.

(3) P 在 BC 上时, P 点坐标为 $(-3, 4)$;

P 在 CD 上时, P 点坐标为 $(-5, 2)$.

【解析】 (1) $\because$ 点 B 从 y 轴移动到 $C(-5, 4)$,

$\therefore$ 平移了5个单位,

$\therefore \triangle OAB$ 沿 x 轴负方向平移5个单位到 $\triangle DEC$,

$\therefore$ 点 $A(1, 0)$ 向 x 轴负方向运动5个单位得到点 E ,

$\therefore E(-4, 0)$,

故答案为: $(-4, 0)$.

(2) 由平移知, $BC = 5$,

①当点 P 在 CB 上时,

$\therefore 0 \leq t \leq 5$,

$\therefore P(-t, 4)$,

$\therefore -t + 4 = -3$,

$\therefore t = 7$ (舍去).

②当 P 在 CD 上时, $5 \leq t \leq 9$,

$\therefore P(-5, 9 - t)$,

$\therefore -5 + 9 - t = -3$,

$\therefore t = 7$,

综上所述，当 $t = 7$ 时， P 的横纵坐标和为 -3 。

$$(3) S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{(5+6) \times 4}{2} = 22, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10,$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = 12.$$

①当 P 在 BC 上时，

$$\therefore S_{\triangle ABP} < S_{\text{四边形}CDAP},$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = 22 \times \frac{3}{11} = 6,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times t = 6,$$

即 $t = 3$ ，此时 $P(-3, 4)$ 。

②当 P 在 CD 上时，

$$\therefore S_{\triangle ADP} < S_{\text{四边形}APCB},$$

$$\therefore S_{\triangle ADP} = 22 \times \frac{3}{11} = 6,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times (9-t) \times 6 = 6,$$

即 $t = 7$ ，此时 $P(-5, 2)$ 。

综上所述： P 点坐标为 $(-3, 4)$ 或 $(-5, 2)$ 。

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

二、坐标系中的规律探究

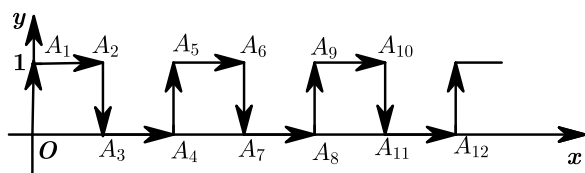
【教法备注】

此类题目注重观察点的坐标特点，探索坐标系中图形迭代与坐标变化规律，体会循环周期在其中的应用。先写出前几个点的坐标，一种思路是分别找横纵坐标规律；另一种思路是先找出横纵坐标中容易得到规律的坐标，然后再看横纵坐标间的关系即可。

直接寻找坐标的周期规律

例题2

8. 在平面直角坐标系中，一蚂蚁从原点 O 出发，按向上、向右、向下、向右的方向依次不断移动，每次移动1个单位，其行走路线如图所示。



(1)

填写下列各点的坐标： A_4 （ _____ ， _____ ）， A_8 （ _____ ， _____ ）， A_{12} （ _____ ， _____ ）。

（2）写出点 A_{4n} 的坐标（ n 是正整数）。

（3）指出蚂蚁从点 A_{100} 到点 A_{101} 的移动方向。

【答案】（1）2；0；4；0；6；0

（2） $(2n, 0)$ 。

（3）向上。

【解析】（1） $A_4(2, 0)$ ， $A_8(4, 0)$ ， $A_{12}(6, 0)$ 。

（2）当 $n = 1$ 时， $A_4(2, 0)$ ，

当 $n = 2$ 时， $A_8(4, 0)$ ，

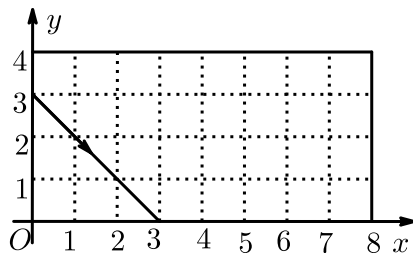
当 $n = 3$ 时， $A_{12}(6, 0)$ ，

所以 $A_{4n}(2n, 0)$ 。

（3）点 A_{100} 中的 n 正好是4的倍数，所以点 A_{100} 和 A_{101} 的坐标分别是 $A_{100}(50, 0)$ ， A_{101} 的 $(50, 1)$ ，所以蚂蚁从点 A_{100} 到 A_{101} 的移动方向是向上。

【标注】【知识点】点坐标找规律

9. 如图，动点 P 从 $(0, 3)$ 出发，沿所示方向运动，每当碰到矩形的边时反弹，反弹时反射角等于入射角，当点 P 第2013次碰到矩形的边时，点 P 的坐标为（ ）。



A. $(1, 4)$

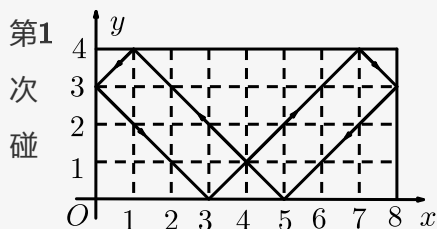
B. $(5, 0)$

C. $(6, 4)$

D. $(8, 3)$

【答案】 D

【解析】 如图所示：

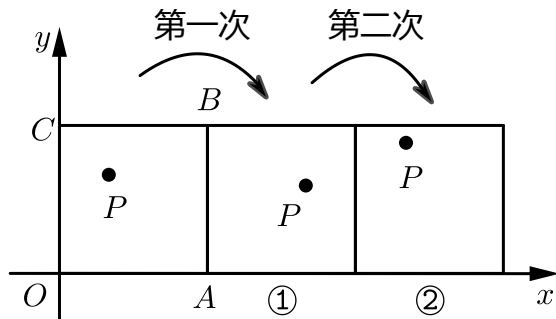


到矩形的边时 $P(3, 0)$,
 第2次碰到矩形的边时 $P(7, 4)$,
 第3次碰到矩形的边时 $P(8, 3)$,
 第4次碰到矩形的边时 $P(5, 0)$,
 第5次碰到矩形的边时 $P(1, 4)$,
 第6次碰到矩形的边时 $P(0, 3)$,
 故每6次碰撞为一个循环 ,
 $\therefore 2013 \div 6 = 335 \text{余} 3$,
 $\therefore$ 第2013次与第3次的碰撞点相同 ,
 $\therefore P(8, 3)$.

【标注】【知识点】点坐标找规律

练习2

10. 如图，把正方形铁片 $OABC$ 置于平面直角坐标系中，顶点 A 的坐标为 $(3, 0)$ ，点 $P(1, 2)$ 在正方形铁片上，将正方形铁片绕其右下角的顶点按顺时针方向依次旋转 90° ，第一次旋转至图①位置，第二次旋转至图②位置 $\cdots$ ，则正方形铁片连续旋转2017次后，点 P 的坐标为 _____ .



【答案】 $(6053, 2)$

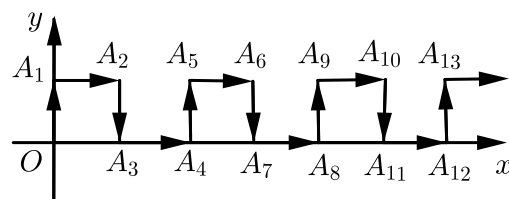
【解析】第一次 $P_1(5, 2)$,
 第二次 $P_2(8, 1)$,
 第三次 $P_3(10, 1)$,
 第四次 $P_4(13, 2)$,
 第五次 $P_5(17, 2)$,
 $\cdots$,
 发现点 P 的位置4次一个循环 ,
 $\therefore 2017 \div 4 = 504 \text{余} 1$,

P_{2017} 的纵坐标与 P_1 相同为2，横坐标为 $1 + 12 \times 504 + 4 = 6053$ ，

$\therefore P_{2017}(6053, 2)$ 。

【标注】【知识点】数列找规律-具有周期规律的数列

11. 如图，在平面直角坐标系中，一动点从原点 O 出发，按向上，向右，向下，向右的方向不断地移动，每次移动一个单位，得到点 $A_1(0, 1)$ ， $A_2(1, 1)$ ， $A_3(1, 0)$ ， $A_4(2, 0)$ ， $\dots$ 那么点 A_{2018} 的坐标为_____。



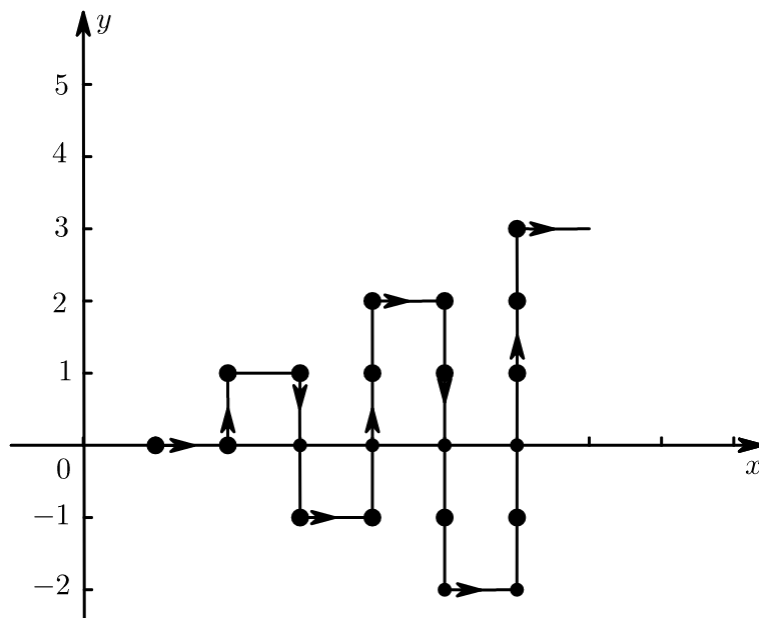
【答案】(1009, 1)

【解析】由题意得， $A_1(0, 1)$ ， $A_2(1, 1)$ ， $A_3(1, 0)$ ， $\dots$ 即每经过四步，向右移动两个单位，然后按照向上，向右，向下，向右的方向依次平移，进入下一个循环，

$2018 \div 4 = 504 \dots 2$ ，则 $A_{2016}(1008, 0)$ ，即 $A_{2018}(1009, 1)$ 。

【标注】【知识点】点坐标找规律

12. 如图，在平面直角坐标系中，有若干个整数点，其顺序按图中“ $\rightarrow$ ”方向排列，如 $(1, 0)$ ， $(2, 0)$ ， $(2, 1)$ ， $(3, 1)$ ， $(3, 0)$ ， $(3, -1) \dots$ 根据这个规律探索可得，第100个点的坐标为（ ）。



A. (14, 0)

B. (14, -1)

C. (14, 1)

D. (14, 2)

【答案】 D**【解析】** 由图可知，横坐标是1的点共有1个，

横坐标是2的点共有2个，

横坐标是3的点共有3个，

横坐标是4的点共有4个，

...

横坐标是 n 的点共有 n 个，

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{当 } n = 13 \text{ 时, } \frac{13 \times (13+1)}{2} = 91,$$

$$\text{当 } n = 14 \text{ 时, } \frac{14 \times (14+1)}{2} = 105,$$

所以，第100个点的横坐标是14，

$$\therefore 100 - 91 = 9,$$

∴第100个点是横坐标为14的点中的第9个点，

$$\therefore \text{第 } \frac{14}{2} = 7 \text{ 个点的纵坐标是 } 0,$$

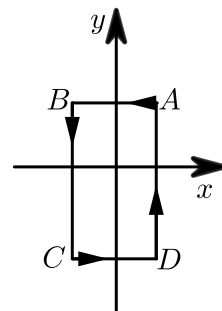
∴第9个点的纵坐标是2，

∴第100个点的坐标是(14, 2) .

故选：D .

【标注】【知识点】点坐标找规律 利用运动的路程分析规律 例题3

13. 如图，在平面直角坐标系中， $A(1, 1)$ ， $B(-1, 1)$ ， $C(-1, -2)$ ， $D(1, -2)$. 把一条长为2018个单位长度且没有弹性的细线（线的粗细忽略不计）的一端固定在点A处，并按 $A - B - C - D - A \cdots$ 的规律绕在四边形ABCD的边上，则细线另一端所在位置的点的坐标是（ ） .



- A. (1, 1) B. (1, -1) C. (-1, -2) D. (1, -2)

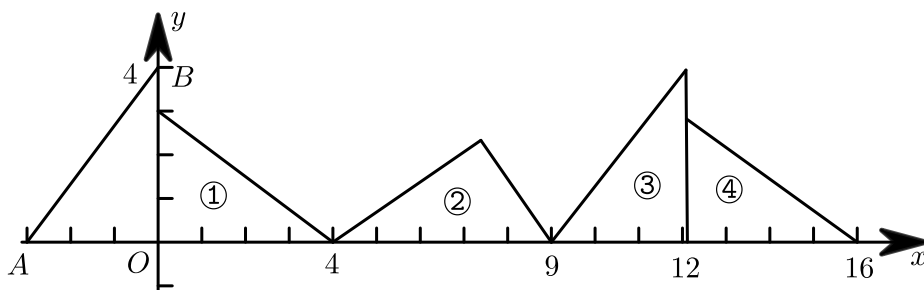
【答案】 B

【解析】 $\because A(1, 1), B(-1, 1), C(-1, -2), D(1, -2)$,
 $\therefore AB = 1 - (-1) = 2, BC = 1 - (-2) = 3, CD = 1 - (-1) = 2$,
 $\therefore$ 绕四边形 $ABCD$ 一周的细线长度为 $2 + 3 + 2 + 3 = 10$.
 $2018 \div 10 = 201 \cdots 8$,
 $\therefore$ 点的坐标为 $(1, -1)$.

【标注】 【知识点】 数列找规律-具有周期规律的数列

练习3

14. 如图，在直角坐标系中，已知点 $A(-3, 0)$ ， $B(0, 4)$ ， $AB = 5$ ，对 $\triangle OAB$ 连续作旋转变换，依次得到三角形①、②、③、④...，则三角形⑩的直角顶点的坐标为 _____.



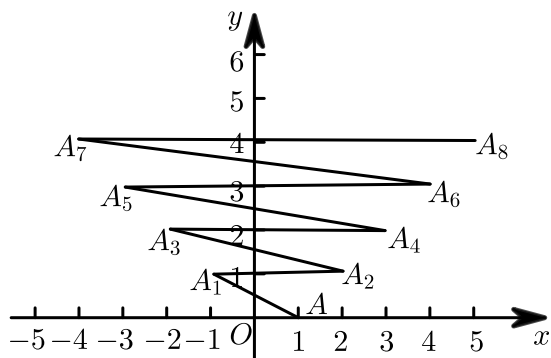
【答案】 (36, 0)

【解析】 观察图形，发现 $\triangle OAB$ 每旋转三次回到原来的状态，并且每三次向前移动了
 $3 + 4 + 5 = 12$ 个单位，于是判断三角形⑩和三角形①的状态相同，且向前移动了
 $3 \times 12 = 36$ 个单位，三角形⑩的直角顶点的坐标为 $(36, 0)$.

【标注】 【知识点】 点坐标找规律

例题4

15. 如图，点 $A(1, 0)$ 第一次跳动至点 $A_1(-1, 1)$ ，第二次跳动至点 $A_2(2, 1)$ ，第三次跳动至点 $A_3(-2, 2)$ ，第四次跳动至点 $A_4(3, 2)$ ，...，依此规律跳动下去，点 A 第100次跳动至点 A_{100} 的坐标是 .



【答案】 第100次跳动至点的坐标是 $(51, 50)$.

【解析】 根据图形观察发现，第偶数次跳动至点的坐标，横坐标是次数的一半加上1，纵坐标是次数的一半，然后写出即可 .

观察发现，第2次跳动至点的坐标是 $(2, 1)$,

第4次跳动至点的坐标是 $(3, 2)$,

第6次跳动至点的坐标是 $(4, 3)$,

第8次跳动至点的坐标是 $(5, 4)$,

...

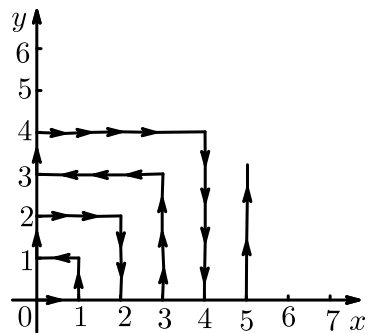
第 $2n$ 次跳动至点的坐标是 $(n+1, n)$,

$\therefore$ 第100次跳动至点的坐标是 $(51, 50)$.

【标注】 【知识点】 点坐标找规律

练习4

16. 如图，一个粒子在第一象限内及 x 轴、 y 轴上运动，在第一分钟内它从原点运动到 $(1, 0)$ ，而后它接着按图示在 x 轴、 y 轴平行的方向上来回运动，且每分钟移动一个单位长度，那么在2017分钟后这个粒子所处的位置（坐标）是 _____ .



【答案】 (44, 7)

【解析】 根据已知图形分析：

坐标(1, 1)，2分钟， $2 = 1 \times 2$ ，运动方向向左，

坐标(2, 2)，6分钟， $6 = 2 \times 3$ ，运动方向向下，

坐标(3, 3)，12分钟， $12 = 3 \times 4$ ，运动方向向左，

坐标(4, 4)，20分钟， $20 = 4 \times 5$ ，运动方向向下，

由此发现规律，当点坐标(n, n)，运动时间 $n(n+1)$ 分钟， n 为奇数，运动方向向左， n 为偶数，运动方向向下，

$\therefore 2017 = 44 \times 45 + 37$ ，

$\therefore$ 可以看做点(44, 44)向下运动37个单位长度，

$\therefore 2017$ 分钟后这个粒子所处的位置（坐标）是(44, 7)。

【标注】【知识点】点坐标找规律

三、坐标系中的新定义

【教法备注】

此类问题注重对题目中所给新定义的理解，解题的关键是能够与已学知识建立联系。

例题5

17. 在平面直角坐标系中，对于平面内任一点，若规定以下三种变换：

① $f(a, b) = (-a, b)$. 如 $f(1, 3) = (-1, 3)$ ；

② $g(a, b) = (b, a)$. 如 $g(1, 3) = (3, 1)$ ；

③ $h(a, b) = (-a, -b)$. 如 $h(1, 3) = (-1, -3)$.

按照以上变换有： $f[g(2, -3)] = f(-3, 2) = (3, 2)$ ，那么 $f[h(5, -3)]$ 等于（ ）。

A. $(-5, -3)$

B. $(5, 3)$

C. $(5, -3)$

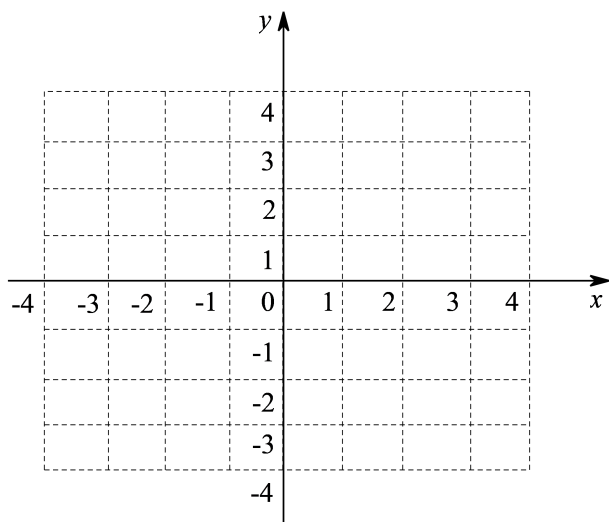
D. $(-5, 3)$

【答案】B

【解析】由本题规定可知： $h(5, -3) = (-5, 3)$ ，则 $f(-5, 3) = (5, 3)$ 所以 $f(h(5, -3)) = (5, 3)$ 。

【标注】【知识点】定义新运算

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于任意两点 A, B ，我们把 A, B 两点横坐标差的绝对值与它们纵坐标差得绝对值的和叫做 A, B 两点间的直角距离，记作 $d(A, B)$ 这个定义我们也可以用符号语言表示为：如果 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 那么直角距离 $d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ 。



- (1) 如果 $A(2, 3), B(-1, -2)$ ，请在所给的坐标系中画出表示 A, B 的点，并求出 $d(A, B)$ 。
- (2) 如果点 $C(-3, 1), D(0, t)$ ，且 $d(C, D) = 4$ ，求 t 的值。
- (3) 已知 O 是原点，平面上的动点 E 满足 $d(O, E) = 2$ ，请在所给的平面直角坐标系中，画出所有符合条件的点 E 组成的图形。

【答案】(1) 8。

(2) $t = 0$ 或 $t = 2$ 。

(3) 画图见解析。

【解析】(1) $\because d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ 。

$$\begin{aligned}d(A, B) &= |2 + 1| + |3 + 2| \\&= 3 + 5 \\&= 8.\end{aligned}$$

(2) $d(C, D) = 3 + |1 - t| = 4$ 。

$$|1 - t| = 1。$$

$$1 - t = \pm 1。$$

当 $1-t=1$ 时.

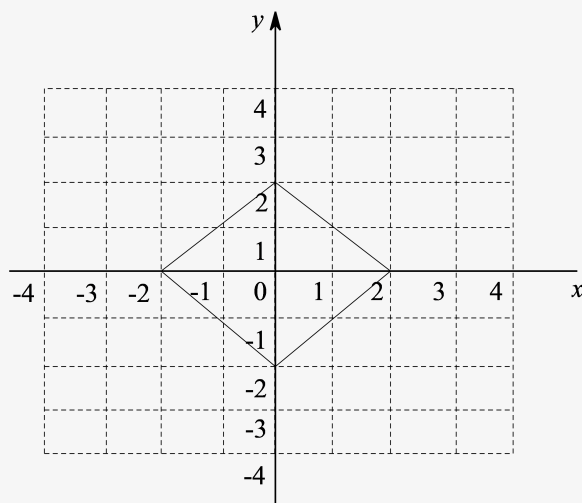
$t=0$.

当 $1-t=-1$ 时.

$t=2$.

$\therefore t=0$ 或 $t=2$.

(3)



【标注】【能力】运算能力

【知识点】坐标与距离

【知识点】画函数图象

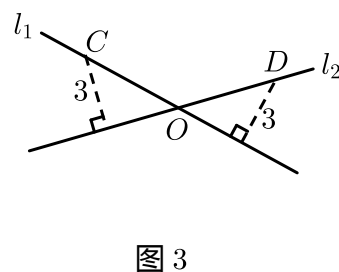
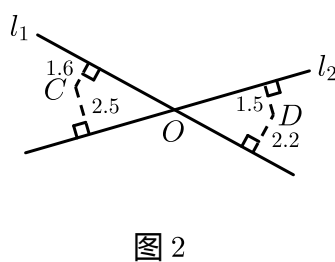
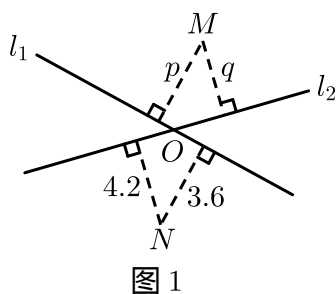
【知识点】函数的图象

19. 如图1, 平面中两条直线 l_1 和 l_2 相交于点 O , 对于平面上任意一点 M , 若点 M 到直线 l_1 的距离为 p , 到直线 l_2 的距离为 q , 则称有序实数对 (p, q) 是点 M 的“距离坐标”. 例如, 图1中点 O 的“距离坐标”为 $(0, 0)$, 点 N 的“距离坐标”为 $(3.6, 4.2)$.

(1) 如图2, 点 C 的“距离坐标”为 _____, 点 D 的“距离坐标”为 _____.

(2) 如图3, 点 C, D 分别在直线 l_1, l_2 上, 则 C, D 两个点中, “距离坐标”为 $(3, 0)$ 的点是 _____.

(3) 平面上“距离坐标”为 $(0, 5)$ 的点有 _____ 个. “距离坐标”为 $(5, 5)$ 的点有 _____ 个.



【答案】 $(1.6, 2.5)$; $(2.2, 1.5)$; D ; 2 ; 4

【解析】 (1) 由题意, 得 $A(1.6, 2.5)$, $B(2.2, 1.5)$.

(2) 由题意, 得 $C(0, 3)$, $D(3, 0)$.

(3) “距离坐标” 为 $(0, 5)$ 的点有2个, 分别在 l_1 上, 且在 O 的两侧. “距离坐标” 为 $(5, 5)$ 的点有4个.

【标注】 【知识点】 坐标与距离